



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA  
DE ȘTIINȚE  
MATEMATICE  
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018**  
**BAREM DE CORECTARE**  
**CLASA A XI-A**

**SUBIECTUL I**

a) Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  cu termenul general:

$$x_n = \{\sqrt{n^2 + 3n + 2}\} + \{\sqrt{n^2 + 5n + 6}\} + \{\sqrt{n^2 + 7n + 12}\}.$$

Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Notăm cu  $\{a\}$  partea fracționară a numărului real  $a$ .

b) Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  cu termenul general:

$$x_n = \sum_{k=0}^{k=p} \{\sqrt{n^2 + (2k+1)n + k(k+1)}\}. \text{ Arătați că } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in (\sqrt{p}, p).$$

**Rezolvare și barem:**

a)  $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

$$n^2 + 5n + 6 = (n+2)(n+3)$$

$$n^2 + 7n + 12 = (n+3)(n+4)$$

$$(n+1)^2 < (n+1)(n+2) < (n+2)^2 \Leftrightarrow (n+1) < \sqrt{(n+1)(n+2)} < (n+2)$$

$$\Rightarrow \left[ \sqrt{n^2 + 3n + 2} \right] = n+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\sqrt{n^2 + 3n + 2}\} = \sqrt{n^2 + 3n + 2} - (n+1) = \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + (n+1)} \dots\dots\dots 1p$$

Analog,  $\left[ \sqrt{n^2 + 5n + 6} \right] = n+2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{\sqrt{n^2 + 5n + 6}\} = \sqrt{n^2 + 5n + 6} - (n+2) = \frac{n+2}{\sqrt{n^2 + 5n + 6} + (n+2)}$$

și  $\left[ \sqrt{n^2 + 7n + 12} \right] = n+3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{\sqrt{n^2 + 7n + 12}\} = \sqrt{n^2 + 7n + 12} - (n+3) = \frac{n+3}{\sqrt{n^2 + 7n + 12} + (n+3)} \dots\dots\dots 1p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 1p$$

b) Conform pct. a),

$$\begin{aligned} \{\sqrt{n^2 + (2k+1)n + k(k+1)}\} &= \sqrt{n^2 + (2k+1)n + k(k+1)} - (n+k) = \\ &= \frac{n+k}{\sqrt{n^2 + (2k+1)n + k(k+1)} + (n+k)} \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^p \{\sqrt{n^2 + (2k+1)n + k(k+1)}\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{p+1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dem. că: } \sqrt{p} < \frac{p+1}{2} < p \dots\dots\dots 2p$$



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA  
DE ȘTIINȚE  
MATEMATICE  
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018**  
**BAREM DE CORECTARE**  
**CLASA A XI-A**

**SUBIECTUL 2**

Fie  $a, b, c$  numere întregi, nu toate nule și  $k \in \mathbb{Z}$ , astfel încât:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ kc & a & b \\ kb & kc & a \end{vmatrix} = 0. \text{ Să se arate că numărul } k \text{ este cub perfect.}$$

**Rezolvare și barem:**

$$\mathbf{d} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ kc & a & b \\ kb & kc & a \end{vmatrix} = a^3 + kb^3 + k^2c^3 - 3abck = \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$= a^3 + (\sqrt[3]{k}b)^3 + (\sqrt[3]{k^2}c)^3 - 3a(\sqrt[3]{k}b)(\sqrt[3]{k^2}c) \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$= \frac{1}{2}(a + \sqrt[3]{k}b + \sqrt[3]{k^2}c) \left[ (a - \sqrt[3]{k}b)^2 + (a - \sqrt[3]{k^2}c)^2 + (\sqrt[3]{k}b - \sqrt[3]{k^2}c)^2 \right] \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\mathbf{d} = 0 \Rightarrow a + \sqrt[3]{k}b + \sqrt[3]{k^2}c = 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} a = -\sqrt[3]{k}b - \sqrt[3]{k^2}c \\ \text{dar } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ nu toate nule, } k \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{k} \text{ și } \sqrt[3]{k^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \text{ cub perfect, } k = x^3, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = -xb - x^2c \in \mathbb{Z} \dots \mathbf{2p}$$

Sau

$$\Rightarrow (a - \sqrt[3]{k}b)^2 + (a - \sqrt[3]{k^2}c)^2 + (\sqrt[3]{k}b - \sqrt[3]{k^2}c)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - \sqrt[3]{k}b = 0 \\ a - \sqrt[3]{k^2}c = 0 \\ \sqrt[3]{k}b - \sqrt[3]{k^2}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt[3]{k}b \in \mathbb{Z} \\ a = \sqrt[3]{k^2}c \in \mathbb{Z} \\ \sqrt[3]{k}b = \sqrt[3]{k^2}c \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k \text{ cub perfect, } k = x^3, x \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA  
DE ȘTIINȚE  
MATEMATICE  
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018**  
**BAREM DE CORECTARE**  
**CLASA A XI-A**

**SUBIECTUL 3**

Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ . Arătați ca următoarele două afirmații sunt echivalente:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{1+\varepsilon}} = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{1-\varepsilon}} = \infty$  ( $\forall$ )  $\varepsilon > 0$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = 1$

**Rezolvare și barem:**

1)  $\Rightarrow$  2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{1+\varepsilon}} = 0 \Rightarrow \exists m_1 > 0$  astfel încât  $\frac{f(x)}{x^{1+\varepsilon}} < 1, \forall x > m_1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{1-\varepsilon}} = \infty \Rightarrow \exists m_2 > 0$  astfel încât  $\frac{f(x)}{x^{1-\varepsilon}} > 1, \forall x > m_2$  .....1p

Fie  $m = \max(m_1, m_2, 1)$  atunci  $x^{1-\varepsilon} < f(x) < x^{1+\varepsilon} \forall x > m \Rightarrow \ln x^{1-\varepsilon} < \ln f(x) < \ln x^{1+\varepsilon} \forall x > m$

$m \Rightarrow (1 - \varepsilon) \ln x < \ln f(x) < (1 + \varepsilon) \ln x \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{\ln f(x)}{\ln x} < 1 + \varepsilon$  pentru  $\varepsilon$  ales arbitrar și  $x > m$  deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = 1$  .....2p

2)  $\Rightarrow$  1) Fie  $\varepsilon > 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = 1 \Rightarrow \exists m > 1$  astfel încât  $1 - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\ln f(x)}{\ln x} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}, \forall x > m \Rightarrow$  .....1p

$(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \ln x < \ln f(x) < (1 + \frac{\varepsilon}{2}) \ln x, \forall x > m$

$\ln x^{1-\frac{\varepsilon}{2}} < \ln f(x) < \ln x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}, \forall x > m,$

Din monotonia funcției  $\ln \Rightarrow x^{1-\frac{\varepsilon}{2}} < f(x) < x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}, \forall x > m$  .....1p

$\Rightarrow \frac{f(x)}{x^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{x^{\frac{\varepsilon}{2}}} \forall x > m$  deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{1+\varepsilon}} = 0$  .....1p

$\frac{f(x)}{x^{1-\varepsilon}} > \frac{1}{x^{\frac{\varepsilon}{2}}} \forall x > m$  deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{1-\varepsilon}} = \infty$ . .....1p



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA  
DE ȘTIINȚE  
MATEMATICE  
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018**  
**BAREM DE CORECTARE**  
**CLASA A XI-A**

**SUBIECTUL 4**

- a) Fie  $A \in M_n(R)$  și  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(R)$ . Demonstrați că suma elementelor de pe fiecare linie a matricei  $A$  este egală cu 2 dacă și numai dacă  $A \cdot C = 2 \cdot C$ .
- b) Dacă  $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ ,  $B \in M_n(R)$  are proprietatea că  $\sum_{j=1}^n b_{ij} = \lambda \in R$ ,  $(\forall) i = \overline{1,n}$ , arătați că suma elementelor de pe fiecare linie a matricei  $B^n$  este egală cu  $\lambda^n$ ,  $(\forall) n \in N^*$ .
- c) Fie  $M = (m_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ ,  $M \in M_n(R)$ , astfel încât  $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 4$ ,  $(\forall) i = \overline{1,n}$ . Aflați suma elementelor matricei  $M^4$ .

**Rezolvare și barem:**

- a) Calcul direct .....(2p)
- b) Cerința  $\Leftrightarrow P(n): B^n \cdot C = \lambda^n \cdot C$ ,  $(\forall) n \in N^*$  prin inducție matematică  
Etapa de verificare:  $P(1): B \cdot C = \lambda \cdot C$  în baza punctului anterior .....(1p)  
Etapa de demonstrație: Din  $B^k \cdot C = \lambda^k \cdot C \Rightarrow B^{k+1} \cdot C = \lambda^{k+1} \cdot C$   
 $B \cdot B^k \cdot C = B \cdot (\lambda^k \cdot C) \Leftrightarrow B^{k+1} \cdot C = \lambda^k \cdot (B \cdot C) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow B^{k+1} \cdot C = \lambda^k \cdot (\lambda \cdot C) \Leftrightarrow B^{k+1} \cdot C = \lambda^{k+1} \cdot C$   
Concluzie:  $B^n \cdot C = \lambda^n \cdot C$ ,  $(\forall) n \in N^* \Leftrightarrow$  suma elementelor de pe fiecare linie a matricei  $B^n$  este egală cu  $\lambda^n$ ,  $(\forall) n \in N^*$ . .....(2p)
- c) Folosind punctul b), suma elementelor de pe fiecare linie a matricei  $M^4$  este 256, deci suma elementelor lui  $M^4$  este  $256 \cdot n$  .....(2p)